

MOVIMIENTO DIABÁTICO DE UN GAS EN UN CONDUCTO GIRATORIO

By J. M. DE SENDAGORTA

I.N.T.A.E.T.

Resumen—Se presenta un estudio de las limitaciones aparentes del movimiento unidimensional de un gas con adición de calor o enfriamiento continuos en un conducto giratorio. Como resultado del análisis se obtienen distribuciones del número de Mach que no se observan en movimientos estacionarios cuando las fuerzas másicas tienen un efecto despreciable. Después de analizarse el comportamiento de un gas ideal, se incluye el efecto del rozamiento en la aplicación al análisis de la corriente interna en un rotor de helicóptero movido por elementos propulsores de punta de pala.

1. INTRODUCCIÓN

EL problema general del calentamiento o enfriamiento de un gas en movimiento ha sido estudiado en diversas ocasiones durante los años pasados Ref. 1, 2 y 3. Es comunmente, conocido, por ejemplo, que la aportación de calor a una corriente tiene por efecto el que la velocidad del gas en la zona de adición evoluciona hacia la velocidad del sonido, y el caso extremo en que ésta se alcanza, impone una limitación al gasto del gas a través de la cámara de intercambio, o cámara de combustión. Esta limitación constituye un problema fundamental en el desarrollo de las máquinas propulsoras, cuando éstas en razón de su aplicación hayan de ocupar un volumen mínimo. Sin embargo, hasta ahora no conocemos ningún estudio análogo que permita prever qué fenómenos y qué limitaciones aparecerán cuando la cámara de intercambio de calor sea giratoria. La razón del trabajo que se presenta, es en su primera parte, la de introducir una teoría simplificada del movimiento de un gas en un conducto giratorio con enfriamiento o aportación de calor continuos, con el fin principal de poner de manifiesto que los efectos de adición de calor pueden ser considerablemente afectados por rotación del conducto.

Surgen casos de aplicación en algunos casos de turbinas de gas descritos en Ref. 4 y en los helicópteros propulsados a reacción, en los cuales el gas que alimenta los órganos propulsores en la punta de las palas, es transmitido por conductos interiores a las mismas. En la segunda parte de este trabajo, y como aplicación de algunos resultados obtenidos, se propone un método aproximado sencillo para el cálculo del movimiento interior del gas en una pala de helicóptero, teniéndose en cuenta los efectos de la rotación, rozamiento y transmisión de calor.

2. NOTACIÓN

- $A = [(\gamma - 1)/2]M_k^2 + D_k$
 $b = (\gamma + 1)M\phi^{1/2}/\psi$ función del número de Mach.
 $D_k = c/c_p T_{so}$ número de Danköhler
 $d =$ parámetro función de α
 $f =$ coeficiente de rozamiento
 $F =$ sección del conducto
 $G(M\alpha) =$ función del número de Mach y del parámetro α
 $h =$ entalpía específica
 $k_i =$ coeficiente de transmisión interior del calor
 $k_e =$ coeficiente de transmisión exterior del calor
 $k =$ coeficiente global de transmisión del calor
 $M =$ número de Mach
 $M_R = R/\sqrt{(\gamma R_g T_{so})}$ número de Mach de la punta del conducto referido a las condiciones de remanso en el eje de rotación
 $M_r = M_{Rx}$
 $m =$ gastos por unidad de superficie en la sección de la raíz
 $p =$ presión estática
 $q =$ cantidad de calor añadido por unidad de masa y tiempo al gas que atraviesa la sección final
 $Q =$ cantidad de calor añadido por unidad de gasto y longitud
 $r =$ distancia de una sección genérica al eje de rotación
 $R =$ radio de la sección final del conducto
 $R_g =$ constante de la ecuación de estado
 $S_i =$ perímetro interior del conducto
 $T =$ temperatura local °K
 $T_a =$ temperatura ambiente exterior
 $T_s =$ temperatura total en el movimiento relativo
 $T_{so} =$ temperatura total del gas en su entrada al conducto (eje de rotación)
 $v =$ velocidad del gas en el conducto
 $x = r/R$
 $\gamma = c_p/c_v$ relación de calores específicos
 $\epsilon =$ variable que determina el grado de avance del proceso de calentamiento o enfriamiento
 $\kappa = k_i/k$ relación entre los coeficientes de transmisión del calor interior y global
 $\rho =$ densidad del gas
 $\tau = b_0^2 (T_s/T_{so})$ variable adimensional de la temperatura total
 $\theta = b_0^2 (T/T_{so})$ variable adimensional de la temperatura local
 $\alpha =$ parámetro que caracteriza la relación entre la adición de calor y la velocidad de giro del conducto

3. HIPÓTESIS Y ECUACIONES

Las hipótesis adoptadas para el planteamiento de las ecuaciones del movimiento son las siguientes:

(a) El conducto es cilíndrico, de sección arbitraria y gira alrededor de un eje geométrico que corta al conducto.

(b) La longitud del conducto es mucho mayor que cualquier longitud característica de su sección, lo cual justifica el que se desprecien las aceleraciones transversales de Coriolis que darían lugar a un movimiento secundario, y el que se considere el movimiento como unidimensional.

(c) El gas obedece a la ecuación de estado de los gases perfectos.

(d) Se supone que el calor específico medio del gas a presión constante c_p es invariable.

Admitidas estas hipótesis, resultan las siguientes ecuaciones que expresan las leyes de conservación de masa e impulso. Continuidad:

$$\rho v = m = cte \quad (1)$$

Impulso

$$m \frac{dv}{dr} + \frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r - \frac{4f}{D} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) \quad (2)$$

que se han de completar con la ecuación de estado

$$p = \rho R_g T$$

y la ecuación de energía. Si se eliminan la presión p y la densidad entre estas tres ecuaciones resulta una ecuación diferencial que describe la variación de la velocidad con la temperatura y distancia. Esta ecuación en forma adimensional se puede escribir:

$$\frac{dL(\gamma + 1/b)}{d\phi_r} + \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{2} \frac{d\tau}{d\phi_r} - \frac{\gamma b_0^2}{\gamma - 1} \frac{d\phi}{\psi} \right] = - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{2fR}{D_0 M R^2} \frac{M}{x} \quad (4)$$

en donde ϕ , ψ , y b son las funciones del número de Mach definidas por:

$$\psi = 1 + \gamma M^2, \quad \phi = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2, \quad \frac{\gamma + 1}{b} = \frac{\psi}{M \phi^{1/2}}$$

ϕ_r es una función del ratio de una sección genérica, y está definida por

$$\phi_r = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M R^2 x^2$$

Puesto que la ecuación de la energía gobierna la variación de la temperatura total T_s del movimiento relativo, se ha creído conveniente utilizar esta variable en la ecuación (4), en lugar de la temperatura local. La temperatura total T_s interviene en ecuación (4) a través de la variable adimensional

$$\tau = b_0^2 \frac{T_s}{T_{s0}}$$

La ecuación de la energía en ejes giratorios solidarios al rotor, se escribe:

$$c_p T + \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - q\epsilon = c_p T_{so} \quad (5)$$

donde q representa el calor total añadido al gas en movimiento por unidad de masa y ϵ es el grado de avance del proceso de adición de calor. Si este proceso consistiese en una reacción química, q representaría el calor de reacción y ϵ el grado de avance de la combustión, medido, por ejemplo, por la fracción de flujo de los productos quemados. La ecuación (5), en forma adimensional se reduce a la siguiente

$$\tau = b_0^2(\phi_r + D_k\epsilon) \quad (6)$$

4. MOVIMIENTO DE UN GAS IDEAL CON ADICIÓN DE CALOR

La ley de adición de calor, es decir, la variación de ϵ , puede ser muy diversa, y dependerá en cada caso del sistema físico elegido para desarrollar el proceso, que suponemos aquí extendido desde el centro del conducto, considerado como punto inicial, hasta la sección en que se trata de calcular el estado del gas y que corresponde al estado final, en que se ha completado la adición de calor. Es decir la variable ϵ pasará desde el valor 0 en el eje de giro del conducto al valor unidad en la sección final. De las diversas distribuciones de ϵ a lo largo del conducto entre ambos valores, inicial y final, para el fin que se persigue en este trabajo, podemos elegir la distribución parabólica

$$\epsilon = x^2$$

que cumple las condiciones mencionadas, y permite, por otra parte, un tratamiento analítico mucho más sencillo. Introduciendo esta condición en la ecuación de la energía ecuación (6), se obtiene la siguiente distribución de la temperatura total a lo largo del conducto

$$\tau = b_0^2(1 + Ax^2) \quad (7)$$

en donde

$$A = \frac{\gamma - 1}{2} M_R^2 + D_k$$

La distribución del número de Mach, sobre la que particularmente estamos aquí interesados, resultará de la ecuación (4), en la que habrá de anularse el segundo miembro que expresa la influencia del rozamiento, ya que consideramos un gas ideal. Por consiguiente, llevando ecuación (7) a la ecuación resultante, se tendría:

$$\frac{dL(\gamma + 1)/b}{dx^2} = \frac{\gamma M_R^2(\phi/\psi) - A}{2(1 + Ax^2)} \quad (8)$$

ecuación en la que se pueden separar las variables, obteniéndose como solución

$$1 + Ax^2 = C \frac{\phi}{M^{2d} \xi^{1-d}} \quad (9)$$

donde

$$\xi = 1 - \alpha M^2$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{[(\gamma + 1)/2] M_R^2 / D_k - 1}$$

$$d = \frac{\gamma - 1 + 2\alpha}{\gamma + 1}$$

Así como en el sistema físico podremos fijar la temperatura T_{s0} , no sucederá lo mismo con el número de Mach M_0 en la entrada ($x = 0$), que dependerá, en general, de las características del sistema que suministre el gas, de las condiciones de escape en la sección final y del calor añadido. Sin embargo, para conocer lo que ocurre entre las secciones de entrada y la final, se podrá fijar M_0 , con lo que la constante de la ecuación (9) quedará determinada. Por consiguiente, la distribución del número de Mach a lo largo del conducto en función de la velocidad periférica de la sección final, de la adición de calor por unidad de masa y de las condiciones de entrada en el centro del conducto, viene dada por

$$\frac{G(M, \alpha)}{G(M_0, \alpha)} = 1 + Ax^2 \quad (10)$$

en donde

$$G(M, \alpha) = \phi \xi^{d-1} M^{-2d}$$

El número de Mach en la sección final está determinado por:

$$\frac{G(M_f, \alpha)}{G(M_0, \alpha)} = 1 + A \quad (11)$$

El segundo miembro de esta ecuación se mantendrá siempre positivo, aun cuando haya enfriamiento y no exista rotación, y el caso extremo en que sea cero corresponderá a un enfriamiento hasta el cero absoluto. En particular, si la velocidad de rotación es cero, la ecuación anterior se reduce a la ecuación bien conocida del movimiento unidimensional de un gas ideal con adición de calor.

$$b^2 = b_0^2(1 + D_k \epsilon) \quad (12)$$

La ecuación (10) puede utilizarse para comparar estados finales, o bien para calcular la distribución de M a lo largo de un conducto indefinido en rotación, puesto que la relación $M_r^2 / D_k \epsilon$ permanecerá constante a lo largo del conducto.

5. TIPOS DE MOVIMIENTO QUE SE PRESENTAN

El parámetro α ó M_R^2/D_k expresan distintas combinaciones posibles de adición de calor, velocidad de rotación y temperatura inicial. La variación de α de lugar a muy diversas formas de la función $G(M, \alpha)$ y, por consiguiente, a variadas configuraciones de la distribución de M , las cuales trataremos de describir a continuación mediante la discusión de $G(M, \alpha)$. El plano de la familia de curvas $G(M, \alpha)$ de puede dividir en los siguientes grupos de curvas, cuyas propiedades se analizan:

Grupo A

Este grupo se caracteriza por la condición

$$1 > \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_R^2}{D_k} > 0 \quad \text{ó} \quad \alpha < -\gamma$$

Fácilmente se comprueban las siguientes características de las curvas $G(M, \alpha)$ de este grupo (Fig. 1).

Estas curvas representan casos de calentamiento, y cubren una zona que está comprendida entre la curva $\alpha = -\gamma$, que corresponde al caso en que la velocidad de rotación es nula y el eje de abscisas sobre el que se ha llevado M^2 , y que corresponde al caso

$$\alpha = -\infty, \quad \text{ó} \quad M_R^2/D_k = [2/(\gamma + 1)]^{1-d}$$

Las curvas $G(M, \alpha)$ son crecientes con M^2 cuando $M < 1$ y decrecientes para $M > 1$. Presentan un máximo para $M = 1$. En la banda de velocidades supersónicas y para números de Mach crecientes tienden asintóticamente a un valor que es función de α . Por otra parte, el segundo miembro de la ecuación (10) es positivo y mayor que la unidad y crece linealmente con M_r^2 , o bien con el cuadrado de la distancia al eje de rotación del conducto.

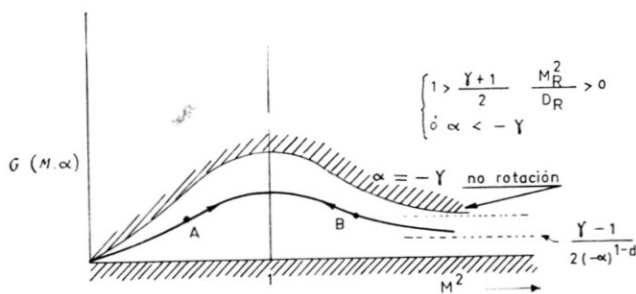


FIG. 1. Curva típica del grupo A

De estos resultados se desprende que:

(a) Si la velocidad de entrada es subsónica, por ejemplo punto A. Fig. 1, el número de Mach es creciente a lo largo del conducto, mientras que si la velocidad de entrada es supersónica, por ejemplo punto B, el número de Mach decrece a lo largo del conducto.

(b) Para cada número de Mach de entrada M_0 , y temperatura total T_{s0} , y para cada relación entre el calor añadido y la velocidad angular de rotación dentro del margen establecido para caracterizar la zona que se estudia, hay una velocidad máxima de la punta del conducto (o una distancia máxima) compatible en régimen estacionario y continuo con las condiciones de entrada fijadas. La velocidad del gas correspondiente a este caso límite es precisamente la velocidad local del sonido.

Estos números de Mach extremos M_{ob} vendrán dados para cada valor del parámetro α por la relación

$$\frac{G(1, \alpha)}{G(M_{ob}, \alpha)} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_R^2 \left(1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \right)$$

Por consiguiente, si la longitud del conducto excede de la máxima que corresponde a unas condiciones de entrada dadas, necesariamente se efectuará un reajuste de dichas condiciones. Es decir, hay bloqueo de la corriente para las primeras.

Curva $\alpha = \pm\infty$

Sobre ella se verifica la relación $M_R^2/D_k = 2/(\gamma + 1)$. Constituye un caso particular de calentamiento. La relación (10) se presenta indeterminada para este valor de α . Es fácil aclarar la indeterminación volviendo a la ecuación diferencial de partida cuya integración conduce a una solución semejante a las del grupo A. Se mantiene pues en este caso las propiedades enunciadas para los comprendidos en el grupo A.

Curva $\alpha = -\gamma$

Equivale a $M_R = 0$, es decir, no hay rotación. El número de Damköhler D_k puede tomar valores positivos o negativos, por consiguiente esta curva limita zonas de enfriamiento y calentamiento. La ecuación que da la variación de M se reduce a la ecuación (12). Los resultados son bien conocidos. Si D_k es positivo, es decir, hay aportación de calor a la corriente, se mantienen las conclusiones relativas a la zona A. Por el contrario, si hay enfriamiento sucede, según se deduce de la ecuación (12) que la velocidad de la corriente evolucionará apartándose siempre de la del sonido y no habrá bloqueo.

Grupo B

Está caracterizado por la condición:

$$0 > \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_R^2}{D_k} > -\infty \quad \text{ó} \quad -\gamma < \alpha < 0$$

Todos los casos de enfriamiento están comprendidos en este grupo, Fig. 2. La zona que cubre está limitada por la curva $\alpha = -\gamma$, cuyas características se han expuesto y por la curva $\alpha = 0$ que corresponde al caso adiabático.

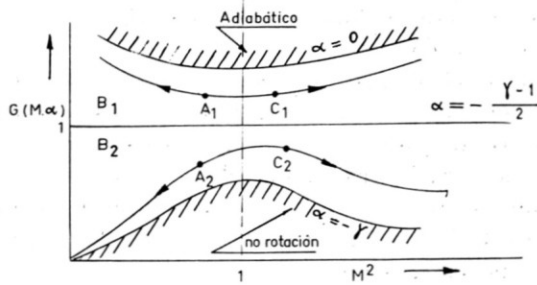


FIG. 2. Curva típica del grupo B Enfriamiento

La zona queda dividida en dos partes por la curva $\alpha = -(\gamma - 1)/2$. La superior B_1 corresponde a $\alpha > -(\gamma - 1)/2$ y la inferior B_2 a $\alpha < -(\gamma - 1)/2$. Las curvas $G(M, \alpha)$ de la zona B_1 son decrecientes con M para $M < 1$ y crecientes para $M > 1$; presentan un mínimo para $M = 1$. Para velocidades supersónicas y números de Mach crecientes, tienden asintóticamente a un valor positivo función de α . Por el contrario, las curvas de la zona B_2 son crecientes con M para $M < 1$ y decrecientes para $M > 1$, presentando un máximo para $M = 1$, y tendiendo asintóticamente para $M \rightarrow \infty$ a un valor dado por la misma función de α que en el caso de la zona B_1 . Para la zona B_1 el segundo miembro de la ecuación (10) es creciente linealmente con M_r^2 (o con el cuadrado de la distancia al eje de rotación), mientras que para la zona B_2 crece linealmente con M_r^2 .

De estos resultados se deduce que en cualquier caso de enfriamiento:

(a) Si la velocidad de entrada es subsónica, por ej. puntos A_1 ó A_2 (Fig. 2) el número de Mach decrece a lo largo del conducto, mientras que para velocidades de entrada superiores a la sónica, por ejemplo puntos C_1 y C_2 , el número de Mach aumenta a lo largo del conducto.

(b) La velocidad de la corriente evoluciona siempre apartándose de la del sonido. No hay pues posibilidad de bloqueo.

Sobre la curva $\alpha = -(\gamma - 1)/2$, que corresponde al caso en que el enfriamiento y la rotación están combinados de manera que $A = 0$, la solución general presenta una singularidad. Integrando la ecuación original se comprueba que en este caso se aplican igualmente las propiedades (a) y (b) correspondientes a toda la zona B .

Curva $\alpha = 0$

Corresponde al caso adiabático, en que la distribución del número de Mach viene dada por:

$$\frac{G(M, 0)}{G(M_0, 0)} = \phi_r \quad (13)$$

$$G(M, 0) = \frac{\phi}{M^2(\gamma + 1)/(\gamma - 1)}$$

La velocidad tiende a separarse de la del sonido a lo largo del conducto.

Grupo C

Está caracterizado por la condición

$$\frac{M_R^2}{2D_K} > 1 \quad \text{ó} \quad 0 < \alpha < 1$$

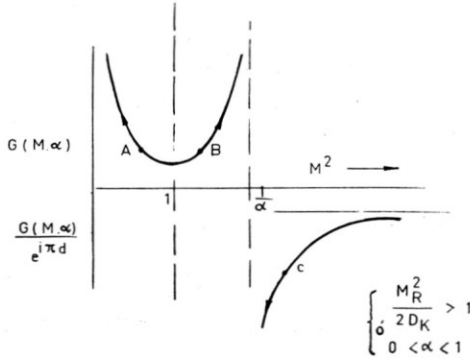


FIG. 3. Curva típica del grupo C

Corresponde a casos de aportación de calor. En este grupo (Fig. 3) las curvas $G(M, \alpha)$ presentan un mínimo para $M = 1$ y en la banda supersónica una asíntota paralela al eje de ordenadas para $M = (1/\sqrt{\alpha})^{1-d}$. Para $M > 1/\sqrt{\alpha}$ no tiene sentido real la función $G(M, \alpha)$, pero teniendo en cuenta que es la relación $G(M, \alpha)/G(M_0, \alpha)$ la que aparece en ecuación (10), será igualmente útil representar para el intervalo $M > 1/\sqrt{\alpha}$, la función

$$G(M, \alpha)e^{-i\pi d} = \frac{\phi}{M^{2d}(-\xi)^{1-d}}$$

Las curvas $G(M, \alpha)e^{-i\pi d}$ presentan una asíntota paralela al eje de ordenadas para $M = 1/\sqrt{\alpha}$ y tienden también asíntoticamente a un valor función de α para $M \rightarrow \infty$.

De estas propiedades se desprenden las siguientes conclusiones para los casos del grupo C.

(a) Cuando la velocidad de entrada es subsónica (punto A), M decrece a lo largo del conducto.

(b) Para velocidades de entrada supersónicas con $M_0 < 1/\sqrt{\alpha}$ (punto B), el número de Mach crece a lo largo del conducto sin llegar nunca a alcanzar el valor límite $1/\sqrt{\alpha}$.

(c) Si la velocidad de entrada es supersónica, con $M_0 > 1/\sqrt{\alpha}$, el número de Mach disminuye sin que se rebase el límite inferior $1/\sqrt{\alpha}$.

Las conclusiones (b) y (c) tienen especial importancia pues según ellas se puede establecer un fenómeno semejante al de bloqueo para números de Mach finales distintos de la unidad. Para pasar de un número de Mach $M > 1/\sqrt{\alpha}$ a otro $M < 1/\sqrt{\alpha}$ sería necesaria la presencia de

una superficie de discontinuidad de características distintas de las de la onda de choque adiabática. Por otra parte, de las condiciones de compatibilidad dinámicas para una superficie de discontinuidad consistentes en la existencia de los tres invariantes de masa, impulso y energía se deduce la ecuación de Prandtl que nos indica la imposibilidad de pasar de una velocidad supersónica a otra supersónica a través de la superficie de discontinuidad, por consiguiente, debe descartarse la posibilidad de que tal onda se pueda establecer. Por el contrario, se comprueba fácilmente que el paso de un punto de la rama *B* (supersónico) a otro de la rama *A* (subsónico) se podría establecer a través de una onda de choque normal.

Curva $\alpha = 1$

Corresponde a la siguiente relación entre la velocidad de rotación y la aportación de calor:

$$M_R^2 = 2D_k \quad (14)$$

La función $G(M, \alpha)$ toma la forma $G(M, \alpha) = \phi/M^2$ representada en la Fig. 4.

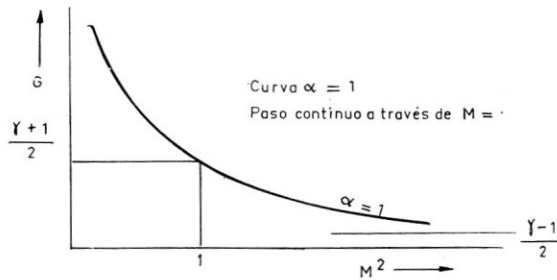


FIG. 4

Cuando se verifica la relación (14) entre la velocidad de rotación y la adición de calor, parece matemáticamente que sería posible una transición continua de régimen supersónico a subsónico. Sin embargo, para $M \simeq 1$ y $\alpha = 1 - \delta$ con $0 < \delta \ll 1$ se obtiene la relación

$$G(M, 1 - \delta) = \frac{\gamma + 1}{2} (1 - M^2)^{-2\delta/(\gamma+1)}$$

que demuestra que una pequeña desviación de α del valor 1 cambia el valor de G de $(\gamma + 1)/2$ a infinito. Parece pues que la solución encontrada según la cual es posible un paso continuo a través de la velocidad sónica no podrá establecerse en un sistema físico.

Grupo D

Está caracterizado por la siguiente condición

$$\gamma + 1 > \frac{\gamma + 1}{2} \frac{M_R^2}{D_k} > 1 \quad \text{ó} \quad 1 < \alpha < \infty$$

Cubre una zona de calentamiento en que la función $G(M, \alpha)$, Fig. 5 se anula para un número de Mach inferior a la unidad $M = 1/\sqrt{\alpha}$. Para $M > 1/\sqrt{\alpha}$ no tiene sentido real $G(M, \alpha)$ y por ello se representa la función $G(M, \alpha) e^{-i\pi d}$. Las curvas de este grupo presentan un mínimo

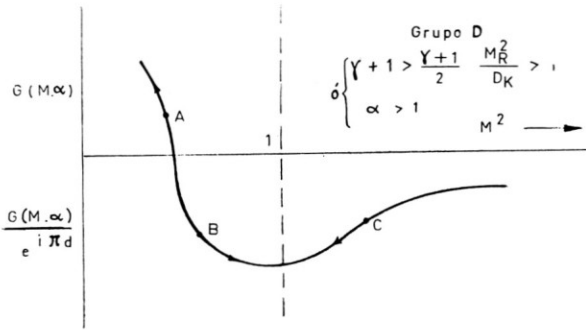


FIG. 5

para $M = 1$, y análogamente a los casos anteriores tienen una asíntota horizontal. El segundo miembro de la ecuación (10) se mantiene positivo, mayor que la unidad y es creciente linealmente con M_r^2 (o cuadrado de la distancia al eje de giro).

De estas propiedades de las curvas de este grupo se deducen las conclusiones siguientes:

(a) Cuando la velocidad de entrada es subsónica con $M_0 < 1/\sqrt{\alpha}$ (punto A), el número de Mach disminuye a lo largo del conducto.

(b) Por el contrario, si el número de Mach de entrada, siendo inferior a la unidad, es superior a $1/\sqrt{\alpha}$ (punto B), M irá aumentando a lo largo del conducto, acercándose la velocidad hacia la del sonido.

(c) Para velocidades supersónicas (punto C) el número de Mach disminuye, aproximándose a la unidad a lo largo del conducto.

Estas conclusiones, si bien son análogas a las de la zona C muestran que no podrá existir aquí el bloqueo para velocidades subsónicas como allí se prevía para las supersónicas. Sin embargo, existe ahora un número de Mach inferior a la unidad $M = 1/\sqrt{\alpha}$ que limita la variación de M en el conducto, consistiendo el efecto en que M tiende siempre a apartarse de este valor, si el movimiento estacionario se mantiene. Cuando el número de Mach de entrada es $M_0 = 1/\sqrt{\alpha}$, éste no experimenta variación en el proceso. Así como para la distribución de temperaturas totales existe una equivalencia entre los efectos de rotación y calentamiento ecuación (7), para la distribución de números de Mach, por el contrario, aparece una equivalencia entre rotación y enfriamiento. La rotación equivalente a un enfriamiento $D_k < 0$ sería

$$M_{R^2 \text{equiv.}} = -\frac{2\psi_0}{\gamma + 1} D_k \tag{15}$$

puesto que para una aportación de calor positiva igual a $-D_k$, tanto un enfriamiento D_k como una rotación dada por (15) tendría por efecto el que el número de Mach fuese constante a lo largo del conducto.

6. EFECTO DEL ROZAMIENTO EN CORRIENTE DIABÁTICA

El rozamiento contribuirá a la variación del número de Mach, produciendo un efecto análogo al de adición de calor. Si se encontrase una expresión analítica de dicha equivalencia, el problema de predecir el número de Mach final se reduciría al de la corriente diabática sin rozamiento, resuelto en lo que precede bajo la hipótesis particular de distribución parabólica del grado de avance del proceso de adición de calor. La ecuación (4) en que se incluye el rozamiento y adición de calor, se puede escribir en la forma

$$\frac{\psi \, dL[(\gamma + 1)/b]}{dx^2} = \frac{[(\gamma + 1)/2]M_R^2 - D_k}{2(1 + Ax^2)} - \frac{\gamma M^2 D_k}{2(1 + Ax^2)} - \gamma \frac{fR}{D} \frac{M^2}{x} \quad (16)$$

El efecto del rozamiento entre las condiciones de entrada y salida sería pues equivalente al de adición de calor debido al segundo término del segundo miembro de esta ecuación si se tomase un D_k equivalente tal que

$$\frac{D_{k,e}}{2} \int_0^1 \frac{M^2 \, dx^2}{1 + Ax^2} = 2 \frac{fR}{D} \int_0^1 M^2 \, dx \quad (17)$$

Una primera aproximación para calcular el $D_{k,e}$ definido por esta ecuación consistiría en tomar

$$M^2 = M_0^2 + (M_f^2 - M_0^2)x \quad (18)$$

con lo que de (17) resultaría:

$$D_{k,e} = 2A \frac{fR}{D} \frac{M_0^2 + M_f^2}{M_0^2 L(1 + A) - 2(M_f^2 - M_0^2)[1 - (\arctg \sqrt{A})/\sqrt{A}]}$$

Con este $D_{k,e}$, o con otro más aproximado por medio de una iteración, la ecuación (16) se puede integrar en la misma forma que la ecuación (8), resultando como solución

$$\frac{G(M_f, d_1)}{G(M_0, d_1)} = (1 + A)^{d_1/d} \quad (19)$$

en donde G está definido igualmente que en la ecuación (10) por:

$$G(M, d_1) = \phi \xi_1^{d_1-1} M^{-2d_1}$$

siendo ahora:

$$d_1 = \frac{\gamma - 1 + 2\alpha_1}{\gamma + 1}, \quad \alpha_1 = \alpha \left(1 + \frac{D_{k,e}}{D_k} \right)$$

La ecuación (19) iterada que resolvería el problema, admite una discusión análoga a la efectuada anteriormente cuando no se consideraba el rozamiento. La primera aproximación anterior, basada en la ecuación (18), debe ser particularmente correcta cuando el efecto de rozamiento, caracterizado por el parámetro fR/D y el valor medio de M^2 , sea pequeño con relación a los efectos de rotación y calentamiento. Por añadidura puede suceder que este último sea también pequeño con relación al de rotación, o que por haber enfriamiento se compense su efecto con el de rozamiento. En particular, esto último ocurre en el caso de la corriente interna del gas a través de las palas de un rotor de helicóptero propulsado a reacción. En estos casos en que el efecto de la rotación sea preponderante, estará justificado emplear una aproximación M^2 vs. x en los dos últimos términos de ecuación (16) lo cual nos permitirá obtener una solución analítica de dicha ecuación. Una primera aproximación de M^2 vs. x sería la que resulta en corriente adiabática, sin rozamiento,

$$\frac{\phi_0}{\phi} \left(\frac{M^2}{M_0^2} \right)^{(\gamma-1)/(\gamma+1)} = \frac{1}{\phi_r}$$

sin embargo, como primera aproximación, aún resulta más sencillo emplear la forma lineal de la ecuación (18), que sustituida en los dos últimos términos de ecuación (16), da lugar a una ecuación cuya integración conduce a la siguiente:

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi - 2\gamma\Delta(M^2) \left[\frac{D_k}{A} \left(1 - \frac{\text{arctg } \sqrt{A}}{\sqrt{A}} \right) + \frac{fR}{D} \right] \\ = \left[\frac{\gamma M_R^2}{A} - 1 \right] L(1+A) - \gamma M_0^2 \left[\frac{L(1+A)}{A} D_k + 4 \frac{fR}{D} \right] \quad (20) \end{aligned}$$

en donde, utilizando la misma notación que en la Ref. 7, se ha escrito por brevedad

$$\Phi = L \left[\frac{M^2}{\phi^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \right]$$

La ecuación (20) admite una solución gráfica análoga a la que se propone a continuación para el caso de la corriente interna en las palas de helicóptero.

7. APLICACIÓN A LA CORRIENTE INTERNA A TRAVÉS DE LAS PALAS DE UN ROTOR DE HELICÓPTERO PROPULSADO A REACCIÓN

El análisis de la corriente en este caso, fué primeramente propuesto por la firma inglesa Percival Aircraft Ltd. a Kestin y Zaremba⁽⁵⁾. Estos autores después de deducir las ecuaciones que gobiernan el movimiento en el caso unidimensional adiabático, analizaron el comportamiento de la ecuación diferencial no lineal resultante en el entorno de sus puntos

singulares y obtuvieron soluciones asintóticas. Este mismo problema del helicóptero ha sido también analizado por Henry⁽⁶⁾ y Makofski⁽⁷⁾ que lo han tratado en diversas formas. En la Ref. 7, después de agrupar convenientemente las numerosas variables se construyeron diagramas punto a punto, mediante cálculo numérico, para un conjunto de casos típicos.

Aquí sólo haremos aplicación de algunas de las consideraciones precedentes para establecer un método rápido aproximado para el cálculo de la distribución del número de Mach, comparándose finalmente los resultados obtenidos con los procedentes del cálculo numérico de la Ref. 7. Los procedimientos indicados por las ecuaciones (19) y (20) pueden ser simplificados en este caso si se tiene en cuenta que la transmisión de calor además de ser muy pequeña, consistirá normalmente en un enfriamiento. Si el movimiento fuese adiabático $D_k = 0$, la ecuación (20) se reduce a la siguiente:

$$-\Delta\Phi - 2\gamma \frac{fR}{D} \Delta(M^2) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} L\phi_R - 4\gamma \frac{fR}{D} M_0^2 \quad (21)$$

Si hay un enfriamiento $-D_k$, aplicaremos la equivalencia formulada en ecuación (15) entre el enfriamiento y la rotación, con lo que introducimos una corrección sobre la ecuación aproximada (21), para obtener el efecto de dicho enfriamiento. Así obtenemos la siguiente relación

$$-\Delta\Phi + 2\gamma \frac{fR}{D} \Delta(M^2) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} L\left(\phi_R + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \psi_0 D_k\right) - 4\gamma \frac{fR}{D} M_0^2 \quad (22)$$

En especial cuando $[(\gamma - 1)/2]M_R^2 + [(\gamma - 1)/(\gamma + 1)]\psi_0 D_k$ sea pequeño frente a la unidad se obtendrá:

$$-\frac{\Delta\Phi}{fR/D} - 2\gamma \Delta(M^2) = \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{M_R^2}{fR/D} + \frac{2\psi_0}{\gamma + 1} \frac{D_k}{fR/D} \right) - 4\gamma M_0^2 \quad (23)$$

Para resolver el problema por medio de la ecuación (22) o la (20) necesitaremos conocer además el número D_k que debe sustituirse en ellas. Siendo Q el calor transmitido por unidad de longitud del conducto y por unidad de gasto que pasa por una sección genérica, si k es el coeficiente global de transmisión referido a la superficie interior del conducto, se tendrá:

$$\rho v F Q = k S_i (T_a - T_{pa}) \quad (24)$$

en donde F es la sección del conducto, S_i su perímetro interior, T_a la temperatura ambiente y T_{pa} la temperatura adiabática de la pared que suponemos igual a la temperatura de remanso en la sección de referencia, lo cual equivale a tomar un coeficiente de recuperación igual a la unidad.

Por otra parte, si k_i es el coeficiente local de transmisión interior se tendrá, también:

$$\rho v F Q = k_i S_i (T_{pi} - T_{pa})$$

siendo T_{pi} la temperatura de la pared interior. Se define un nuevo coeficiente $\kappa = k/k_i$, que si se desprecia el calentamiento aerodinámico que pudiera producirse en el movimiento de las palas se calculará mediante

$$\frac{1}{\kappa} = 1 + \frac{k_i S_i}{k_e S_e} + Z k_i S_i$$

en donde

k_e : es el coeficiente local de transmisión exterior

Z : la resistencia térmica de la pared

S_e : el perímetro exterior de la pala

Así la ecuación (24) se podrá escribir

$$\frac{D}{4} Q = \frac{k_i}{c_p \rho v} \kappa c_p (T_a - T_s)$$

Por la analogía de Reynolds se establece que el número de Stanton $k_i/c_p \rho v$ es igual a un medio del coeficiente de rozamiento, con lo que la ecuación anterior se reduce a la siguiente

$$\frac{D}{4} Q = \frac{f}{2} \kappa c_p (T_a - T_s) \quad (25)$$

El número de Danköhler D_k que se ha utilizado para expresar la adición de calor se relaciona con Q de la siguiente manera:

$$D_k = R \int_0^1 \frac{Q}{c_p T_{so}} dx$$

o teniendo en cuenta la ecuación (25):

$$D_k = 2 \frac{fR}{D} \int_0^1 \kappa \left(\frac{T_a}{T_{so}} - \frac{T_s}{T_{so}} \right) dx$$

Por otra parte suponiendo, que para el cálculo de la distribución de M , sea aceptable la aproximación parabólica de ϵ vs. x , llevando la ecuación de la energía ecuación (7) al integrando de la ecuación anterior se tendrá finalmente:

$$D_k = 2 \frac{fR}{D} \kappa \frac{T_a/T_{so} - 1 - [(\gamma - 1)/6] M_R^2}{1 + \frac{2}{3} fR/D} \quad (26)$$

en donde κ ahora es un valor medio. Cuando M_R y R/D no tomen valores que excedan considerablemente de los que normalmente se presentan, la ecuación (26) se aproximará mediante la siguiente:

$$D_k \simeq 2 \frac{fR}{D} \kappa \left(\frac{T_a}{T_{so}} - 1 \right) \quad (27)$$

Si se introduce ésta en la ecuación (23) se comprueba que $\Delta\Phi/(fR/D)$ depende solamente de $M_R^2/(fR/D)$, κ , T_a/T_{so} y del número de Mach de entrada. Este resultado que ha sido comprobado mediante el cálculo numérico en la Ref. 7, y que fué utilizado para la construcción de los

diagramas que allí se presentan, parece aquí que solamente será válido cuando se pueda suponer que por ser $A = [(\gamma - 1)/2]M_R^2 + D_k \ll 1$ resulte $L(1 + A) \simeq A$.

Determinación gráfica de primeras aproximaciones

Cuando se adopta las ecuaciones (20) ó (22) para obtener primeras aproximaciones, dichas ecuaciones admiten una solución gráfica sencilla sobre los Diagramas I y II, que se describen a continuación.

Diagrama I. En éste se representa para $\gamma = 1.4$ la familia de curvas

$$-\phi + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} L\phi_R$$

en función de M^2 y para distintos valores de M_R^2 . Una vez estimados κ y f , y fijadas las condiciones de entrada T_{so} y M_0 , se procede en la siguiente forma:

Sobre la curva del diagrama correspondiente a

$$M_{R,E}^2 = M_R^2 + M_{R,e}^2 = \frac{\omega^2 R^2}{\gamma R_g T_{so}} + \frac{2}{\gamma + 1} \psi_0 D_k$$

se fija el punto A sobre la abscisa de M_0^2 . Sobre la misma abscisa se determina A_1 , por debajo de A de forma que

$$\overline{AA_1} = 4\gamma \frac{fR}{D} M_0^2$$

Finalmente, por el punto A_1 se traza una recta de coeficiente angular

$$-\text{tg } \theta = -2\gamma \frac{fR}{D}$$

El punto de intersección de esta recta con la curva $M_R^2 = 0$ nos proporciona sobre el eje de abscisas el cuadrado del número de Mach en la sección final M_f .

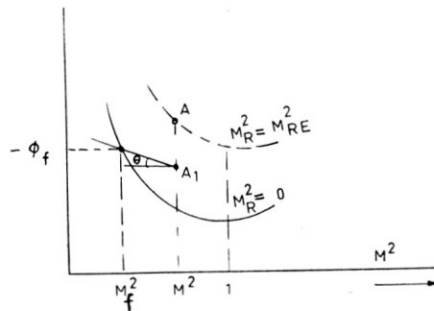


FIG. 6. Empleo del diagrama I

Diagrama II. Cuando la diferencia $\phi_0 - \phi_f$ es negativa y el número de Mach de entrada es próximo a la unidad, la solución sobre el Diagrama I viene mal determinada. Para resolver estos casos se ha construido el Diagrama II en el que se representan la familia de curvas

$$-\phi - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} L\phi_R$$

en función de M^2 y para distintos valores de $M_{R,E}^2$. Dado un número de Mach M_f final se procede de la siguiente manera para obtener el de entrada M_0 , Fig. 7:

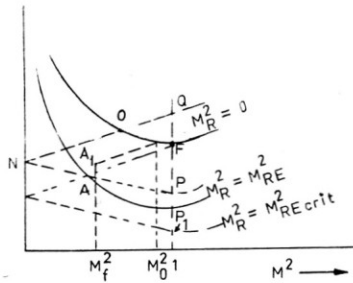


FIG. 7. Empleo del diagrama II

Sobre la curva $M_{R,E}^2$ se fija el punto A correspondiente al número de Mach final M_f^2 ; sobre A se situa A_1 de forma que

$$\overline{AA_1} = 4\gamma \frac{fR}{D} M_f^2$$

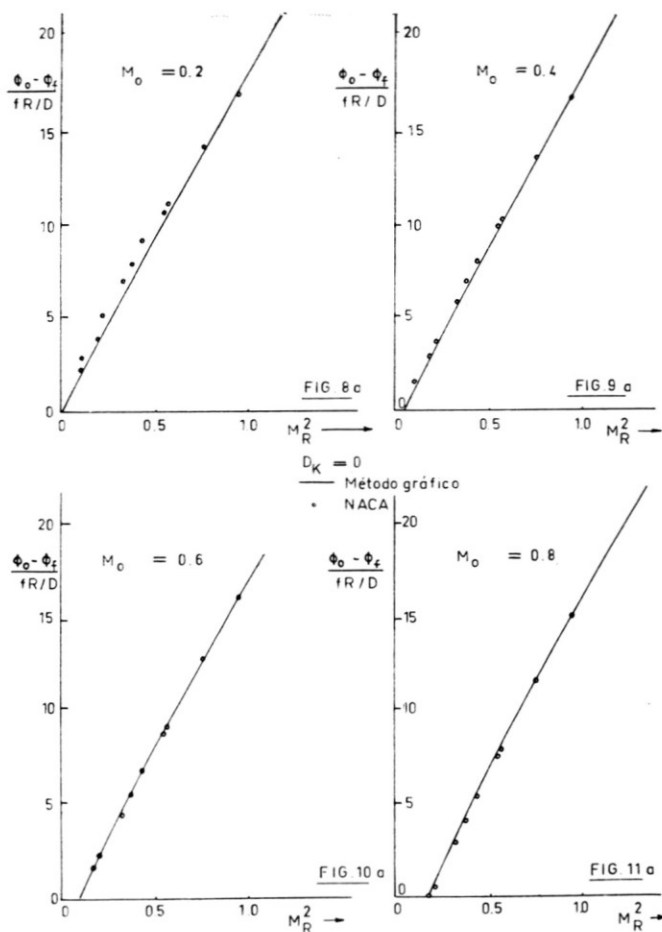
y por A_1 se traza una recta de coeficiente angular $\text{tg } \theta = 2\gamma(fR/D)$. Su punto de intersección con la curva $M_{R,E}^2 = 0$ proporciona sobre el eje de abscisas el cuadrado del número de Mach de entrada M_0 .

Sobre el Diagrama II se pueden también determinar los números de Mach de entrada M_0 aproximados que para cada velocidad de rotación, produzcan una velocidad final igual a la del sonido. Para ello a partir del punto P , en el que $M = 1$ y que está situado sobre una curva genérica $M_{R,E}^2$, se traza la recta NP de coeficiente angular $-\text{tg } \theta$, situándose así el punto N sobre al eje de ordenadas. La recta NQ simétrica de NP respecto a la ordenada de N , corta a la curva $M_{R,E}^2 = 0$ en el punto O , que corresponde al estado inicial que para una velocidad de giro equivalente $M_{R,E}^2$ produce un número de Mach $M_f = 1$ en la sección final. El punto P_1 , para el cual $Q \equiv 0 \equiv F$ está situado sobre una curva $M_{R,E}^2 = M_{R,E}^{2 \text{ crit}}$. Para valores de $M_{R,E}^2$ superiores a él no se alcanza la velocidad del sonido. Para valores menores, la corriente puede estar en condiciones de bloqueo pues no podrá pasar por el conducto, en régimen estacionario y continuo, un gasto superior al que corresponde al número de Mach M_0 que produce el estado final P .

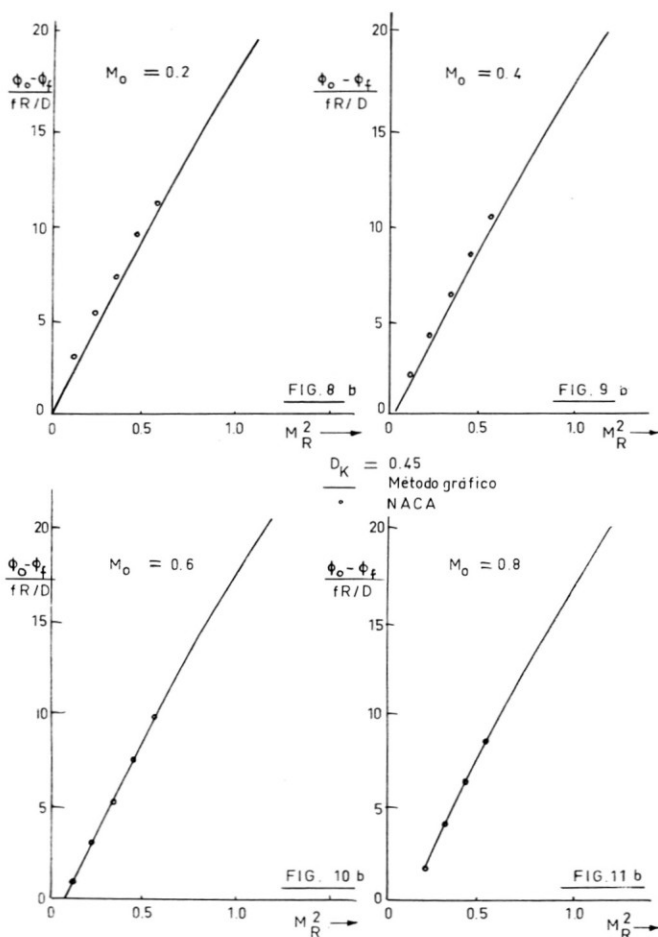
Resultados del método gráfico

En las Figs. 9, 10, 11 y 12 se muestran las curvas obtenidas con el método gráfico propuesto, para un caso adiabático figuras *a*, y para un caso de enfriamiento figuras *b*. Sobre las mismas se han situado algunos puntos tomados de distintos diagramas de la Ref. 7. Aunque, con el fin de comparar resultados en estas figuras aparezcan determinados los incrementos $\Delta\Phi/(fR/D)$, el método gráfico suministra directamente el número de Mach M_f aproximado en función de M_0 .

En las figuras se puede observar que los resultados del método gráfico son satisfactorios en toda la banda de valores de M_R^2 que ofrece interés para el cálculo de actuaciones de un rotor de helicóptero. En el caso



Movimiento del gas conducido por el interior de una pala de helicóptero. Caso adiabático



Movimiento del gas conducido por el interior de una pala de helicóptero. Enfriamiento por el aire ambiente

calculado de enfriamiento no se produce una desviación sustancial de los resultados respecto al caso adiabático, según se puede comprobar al comparar las figuras *a* y *b*. En los casos en que el efecto del rozamiento o enfriamiento sean más importantes habrá de recurrirse a una segunda aproximación en la forma que hemos apuntado anteriormente. Se conseguirá una mejor distribución de temperaturas de remanso a partir de la primera distribución obtenida para el número de Mach por medio de la analogía de Reynolds. Finalmente, para que el problema quede fijado, sería necesario retornar a las primeras ecuaciones, para determinar la variación de la presión.

8. CONCLUSIONES

Con el fin de poner de manifiesto la influencia que las fuerzas másicas pueden tener sobre los efectos de adición de calor, se ha analizado la corriente de un gas con una distribución determinada de aportación de calor o enfriamiento a lo largo de un conducto giratorio. En este análisis se han llegado a establecer diversos esquemas de los tipos de movimiento que se pueden establecer, habiéndose previsto distribuciones del número de Mach que no se presentan en corrientes estacionarias cuando las fuerzas másicas no tienen efecto apreciable. Entre estos efectos cabe destacar el bloqueo de una corriente supersónica para velocidades finales distintas de la del sonido.

Para la distribución del número de Mach existe cierta analogía entre los efectos de rotación y enfriamiento, habiéndose formulado ecuación (15) la relación que debe existir entre la velocidad de rotación y la adición de calor para la que el número de Mach permanece constante a lo largo del conducto.

Analíticamente se llega también a la conclusión de que para una determinada combinación entre el calor aportado y la velocidad de rotación se puede pasar de una forma continua a través de la velocidad del sonido, desde un estado supersónico a otro subsónico, sin embargo no parece que esta solución pueda establecerse físicamente.

La significación física de las soluciones encontradas dependerá de la estabilidad de éstas y ello estará relacionado con las condiciones límites (suministro del gas y condiciones de escape) de un sistema físico concreto.

Se ha estudiado el efecto adicional del rozamiento, principalmente en relación con el problema de la corriente interna a través de las palas de un rotor de helicóptero con elementos propulsores de punta de pala, habiéndose establecido un procedimiento gráfico aproximado para el cálculo de la distribución del número de Mach y teniéndose en cuenta para ello los efectos de rotación, rozamiento y transmisión de calor. La comparación de algunos resultados obtenidos mediante cálculo numérico de las ecuaciones completas con los obtenidos mediante el método propuesto, muestran que éste proporciona soluciones satisfactorias en la banda de velocidades de rotación que pueden tener interés para la previsión de las actuaciones de un rotor de helicóptero. Con el método gráfico se puede también estimar la velocidad de rotación crítica que tiene la propiedad de que para velocidades de rotación superiores a ella, no hay bloqueo para las condiciones de entrada de la corriente.

El autor quiere expresar su agradecimiento al Dr. George Rudinger, Principal Physicist del Cornell Aeronautical Laboratory, por la valiosísima discusión prestada y por sus comentarios a este trabajo. También desea expresar su reconocimiento al Ing. Don Jaime de Los Casares del I.N.T.A. por sus comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

1. A. H. SHAPIRO y W. R. HAWTHORNE, The Mechanics and Thermodynamics of Steady One-Dimensional Gas Flows, *J. Appl. Mech.*, Vol. 14, No. 4, 1947.
2. J. V. FOA y G. RUDINGER, On the Addition of Heat to a Gas Flowing in a Pipe at Subsonic Speed, *J. Aero. Sci.*, February 1949.
3. TH. VON KÁRMÁN, The Theory of Shock Waves and the Second Law of Thermodynamics, *L'Aerotecnica*, February 1951.
4. COX H. ROXBEE, Some Fuel and Power Projects, *Engineering*, Vol. 172, pp. 726-8, 793-6, 823-5, 1951.
5. K. KESTIN y S. K. ZAREMBA, Adiabatic One-Dimensional Flow of a Perfect Gas Through a Rotating Tube of Uniform Cross-Section, *Aero. Quart.*, Vol. IV, Part IV, February 1954.
6. J. R. HENRY, One-Dimensional, compressible, viscous flow relations applicable to flow in a ducted helicopter blade. National Advisory Committee for Aeronautics, Langley Aeronautical Laboratory, NACA-TN-3089. December 1953.
7. R. A. MAKOFSKI, Charts for the analysis of flow in a whirling Duct, National Advisory Committee for Aeronautics, Langley Aeronautical Laboratory, NACA-TN-3950, August 1957.